Image 복원을 위한 일반화된 Wiener 필터링 처리

송봉석, 강 진

1. 서 론

Wiener 필터링으로 알려진 고전적인 신호처리 과정은 디지탈 운용에 의한 1,2차원 데이타 처리에 있어서 계산량을 줄이는 데 중점을 두고 개선되어 왔다.

일반화된 Wiener 필터링 처리에서는 이산 퓨리에, Hadamard, Karhun-Loeve 변환 등과 같은 unitary 변환이 잡음을 포함한 신호를 처리하는데 사용되고 변환된 데이타는 필터 함수에 의해 modified되며 역 변환 과정을 통해 이산시스템 출력을 얻을 수 있다.

여기에서 사용되는 필터 함수는 입력 데이타의 신호 부분을 가장 근접하게 평가할 수 있도록 선택된다.

모든 unitary 데이타 변환에서는 동일한 최소 평균 자승 오차 성능을 갖는 것으로 알려져 있지만 고속 퓨리에 변환 알고리즘을 사용하면 퓨리에 변환이나 Hadamard 변환 등과 같은 몇 가지 변환들에 대해서는 계산량을 상당히 줄일 수 있다.

이러한 일반화된 Wiener 필터링 처리를 1차원에 대하여 먼저 알아보고 실제 Image에 적용되는 2차원일 경우에도 확장시켜 본다.

2. 1차원 필터링

그림1. 은 일반화된 1차원 Winener 필터링 시스템의 블럭도이다.

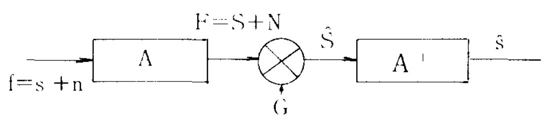

그림 1. 일반화된 Wiener 필터링

영 평균 신호(s)와 잡음(n)으로 구성된 영 평균 M－원소 데이타 열 백터 f를 시스템의 입력으로 하고 신호와 잡음은 무상관 관계라고 가정한다.

이때 M×M 변환 행렬 A로써 unitary 변환을 사용하여 구한 출력을 F라 하면

$$F = Af = As + An = S + N$$

와 같이 표현되고 이 과정으로 부터 얻어진 변환 입력 벡터 F에 M×M 필터 행렬 G를 곱함으로써 $\hat{S}$를 얻을 수 있다.

디지탈 신호 처리에서 사용되는 unitary 변환(A)에 대한 몇 가지 예는 표1. 에 있고 일반적

으로 필터 행렬 (G)은 대각 행렬이 아니다.

그러므로 G가 대각 행렬 외의 항을 포함하고 있을 때의 필터링 작용(벡터 필터링)은 입력 데이타 벡터의 스펙트럼 성분의 복합 형태로 나타나고 G의 대각 행렬 외의 항이 없을 때의 필터링 작용(스칼라 필터링)은 입력 데이타 벡터의 각 스펙트럼 원소에 독립적으로 가중값을 가한 결과로 표시된다.

이렇게 구한 $\hat{S}$를 역 unitary 변환을 취하면 구하고자 하는 $\hat{s}$를 얻을 수 있다.

$$\hat{s} = A^{-1}GF = A^{-1}GAf$$

필터 행렬 G는 신호와 estimate 사이의 평균 자승 오차를 최소화하도록 변환 행렬 A와 관련하여 선택한다.

Fourier:	Hadamard;	Karhunen-Loeve:
$A=\frac{1}{\sqrt{N}}\exp[-\frac{2\pi i}{N}ux]], A^{-1}=A^{*}$	$A=H_N P$, $A^{-1}=A$	$A=K$, $A^{-1}=K^{T}$
N;데이타 벡터 길이 x;데이타 벡터 원소 표시 u;변환된 데이타 벡터 원소 표시	P;행 순열 표시 $H_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ $H_N=\frac{1}{\sqrt{N}}\begin{bmatrix}H_{N/2} & H_{N/2}\\ H_{N/2} & H_{N/2}\end{bmatrix}$	$KC_fK^{-1}=diag[\lambda(i)]$ C_f ;데이타 벡터의 covariance 행렬 K ;C_f의 고유 벡터들 $\lambda(i)$;C_f의 고유값들

표1. Unitary 데이타 변환들

2—1. 통계적 표현

이러한 과정을 통계적으로 표현하면 다음과 같다.

데이타 벡터 f의 평균을 $\bar{f}$라 하고 랜덤 처리의 샘플들이면 covariance 행렬 C_f는 아래 식으로 표현되고

$$C_f = \overline{(f-\bar{f})(f^{*}-\bar{f}^{*})^{T}}$$

데이타 벡터 F=Af 의 unitary 변환에 대한 데이타 covariance 행렬 C_F는

$C_F = \overline{(F-\bar{F})(F^{*}-\bar{F}^{*})^{T}}$ 로써 구할 수 있다.

윗 식은 $C_F = AC_fA^{*} = AC_fA^{-1}$ 로써 간단히 표현된다.

그림1. 의 일반화된 Wiener 필터 시스템을 설계함에 있어서 필터 행렬 G는 평균 자승 오차를 최소화하도록 선택되기 때문에 입력(s)와 estimate(s)의 평균 자승 오차를 구하면

$$e = Tr\left\{\overline{(s-\hat{s})(s-\hat{s})^{T}}\right\}$$
$$= Tr\left\{\overline{(A^{-1}S - A^{-1}G(S+N))((A^{-1}S - A^{-1}G(S+N))^{T}}\right\}$$

이고 $\overline{SS^{T}} = C_S = AC_sA^{*T}$, $\overline{NN^{T}} = C_N = AC_nA^{*T}$, $\overline{SN^{T}} = \overline{NS^{T}} = 0$

를 이용하면 아래 식을 얻을 수 있다.

$$e = Tr\{C_s - 2GC_s + GG(C_s + C_N)\} \quad (1)$$

이상적인 필터 행렬을 구하기 위하여 Lagrangian 기법을 사용하여 오차를 최소화 시키면 구하고자 하는 이상적인 필터 행렬(G_0)은 다음과 같다.

$$G_0=C_s(C_s+C_N) \quad\text{———————} \quad (2)$$

그러므로 이상적인 필터 행렬은 신호와 잡음 벡터의 변환 스펙트럼 밀도로 부터 구할 수 있다. 이상적인 필터는 2차원 변환 경우에도

$$G_0=Ag_0A^{*T}$$

$$g=C_s(C_s+C_n)^{-1}; \text{응답행렬} \quad\text{——————} \quad (3)$$

에 의해 구할 수 있다.

최소 평균 자승 오차를 구하기 위해서 이상적인 필터 행렬을 (1)식에 대입하면 e_{min}을 (4)식과 같이 구할 수 있고 데이타 영역 covariance 행렬들로 다시 표현하면 (5)식과 같다.

$$e_{min}=Tr\{C_sC_N(C_s+C_N)^{-1}\} \quad\text{——————} \quad (4)$$

$$e_{min}=Tr\{C_sC_n(C_s+C_n)^{-1}\} \quad\text{——————} \quad (5)$$

윗 식에서 최소 평균 자승 오차는 unitary 변환의 종류와는 무관하다는 것을 알 수 있다.

2-2. Wiener 필터링의 예

Wiener 필터링의 예로써 백색 잡음이 섞여 있는 Markov 처리 신호의 평균 자승 평가에 대하여 알아 보면 신호 covariance를 C_s, 잡음의 covariance를 C_n라 할 때

$$C_s=\begin{bmatrix} 1 & \varphi & \varphi^2 & \cdots & \varphi^m \\ \varphi & 1 & & & \varphi^{m-1} \\ \varphi^2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \varphi^m & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad C_n=\begin{bmatrix} K_o & & \\ & K_o & \phi \\ & \phi & \ddots \\ & & & K_o \end{bmatrix}$$

φ;인접한 원소 상관 관계

로써 표현되고 이상적인 필터는 (2), (3)을 이용하여 구할 수 있다.

잡음을 포함한 신호의 covariance 행렬은 신호 covariance의 고유벡터들의 행렬 K_s에 의해 diagonalization 된다.

$$K_s(C_s+C_n)K_s^{-1}=\text{diag}\ [k_0+\lambda_s(i)], \quad i=1, 2,\ldots,N$$

$\lambda_s(i)=C$의 고유값들

$$(C_s+C_n)^{-1}=k_s^{-1}\,\text{diag}[(\frac{1}{k_0+\lambda_s(i)})]k_s$$

그러므로 응답 행렬 g는

$$g=C_s+k_s^{-1}\,\text{diag}\,[(\frac{1}{k_0+\lambda_s(i)})]k_s$$

$$=k_s^{-1}\,\text{diag}[(\frac{\lambda_s(i)}{k_0+\lambda_s(i)})]k_s$$

이고 필터 함수 g의 일반 항은

$$g(i,\ j)=\sum_{t=1}^{N}k_s(t,\ i)k_s(t,\ j)\frac{\lambda_s(t)}{k_0+\lambda_s(t)}$$

로써 나타난다.

Markov 처리 covariance 행렬 C_s의 고유벡터들과 고유값들은 상관 관계 인자 ρ에 대하여 되풀이하여 구할 수 있기 때문에 응답 행렬 g는 행렬 크기가 클 경우에도 쉽게 구할 수 있다.

위에서 구한 g를 사용하여 2차원 변환을 수행하는데 사용되는 필터 행렬을 몇 가지 unitary 변환에 대하여 구하면 다음과 같다.

Fourier: $G=FgF^*$

Hadamard: $G=HgH$

Karhunen−Loeve: $G=K_sgK^{-1}=\text{diag}[\frac{\lambda_s(i)}{k_0+\lambda_s(i)}]$

Identity: $[g]=K_s^{-1}(\text{diag}[\frac{\lambda_s(i)}{k_0+\lambda_s(i)}])k_s$

3. 2차원 필터링

Wiener 필터링 개념은 2차원 필터링에도 적용할 수 있다. f(x, y)를 M×M 데이타 행렬 이라 하고 데이타의 2차원 unitary 변환을 F(u, v)라 하면

$$F(u.v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{M-1} f(x, y)\ a\ (x, y, u, v),$$

a (x, y, u, v) ;Unitary 변환 Kernal 으로

표현되고 Wiener 필터링 operation $\hat{S}(\acute{u}, \acute{v})$ 은

$$\hat{S}(\acute{u}, \acute{v})=\sum_{U=0}^{M-1}\sum_{V=0}^{M-1} F(u, v)G(u, v, \acute{u}, \acute{v}),$$

G(u, v, ú, v́);Wiener 필터 함수

가 된다.

위의 식은 변환 영역 $\hat{S}(\acute{u}, \acute{v})$에서 필터된 데이타의 각각의 원소를 구하기 위해서는 F(u, v)의 각 원소에 (u, v)의 다른 값들에 대하여 가중값 함수 G(u, v, ú, v́)를 곱하고 이러한 과정을 모든 (u, v)에 대하여 더함으로써 얻을 수 있다는 것을 보여 준다.

역 변환은 estimate $\hat{S}(x, y)$를 구하면 되는데

$\hat{S}(x, y)=\sum_{\acute{u}=0}^{M-1}\sum_{\acute{v}=0}^{M-1}\hat{S}(u, v)'(x, y, \acute{u}, \acute{v})$ 로써 표시되며

이 때 b(x, y, ú, v́)에 의해 구할 수 있는 역 변환의 kernel이다.

만일 2차원 unitary 변환 kernel을 분리할 수 있으면

변환 [F(u, v)]와 $\hat{S}(x, y)$는 다음과 같이 간단히 구할 수 있다.

$$[F(u, v)]=[a(y, v)]\,[f(x, y)]\,[a(x, u)]$$
$$[S(x, y)]=[b(y, \acute{v})]\,[\hat{S}(\acute{u}, \acute{v})]\,[b(x, \acute{u})]$$

〔·〕;행렬 표현

Wiener 필터링 작용 역시

$$[\hat{S}(\acute{u}, \acute{v})]=[G_g(v, \acute{v})]\,[F(u, v)]\,[G_x(u, \acute{u})]$$

을 이용하여 간단히 구할 수 있다.

여기에서 $[G_x(u, \acute{u})]$, $[G_g(v, \acute{v})]$는 orginal 데이타 배열의 행과 열에 대한 각각의 Wiener 필터 행렬들이다.

결과적으로 분리성을 만족한다면 2차원 Wiener 필터링은 데이타 배열의 행과 열에 대하여 1차원 필터링을 연속적으로 적용하면 된다.

4. 결　론

Wiener 필터링은 초기에 1차원 연속 신호들에 대하여 주로 적용되어 왔지만 2차원 경우에도 확장 사용할 수 있다.

근래에는 2차원 인 경우에도 많이 사용하는데 상당한 계산량을 요구하므로 필터링 operation을 퓨리에 변환과 같은 unitary 변환에 적용함으로써 계산량을 줄일 수 있다.

그리고 이상적인 필터 행렬은 신호와 잡음 백터들의 변환 스펙트럼 밀도로 부터 결정되고 최소 평균 자승 오차는 unitary변환의 종류와는 무관하다는 것도 알 수 있다.

그러므로 필터 generation과 필터 operation에 부과되는 계산 처리를 최소로 하는 변환은 자유로이 선택할 수 있고 unitary 변환을 사용하면 계산량을 줄일 수 있다.

참고문헌

1. William K. Pratt, "Generalized Wiener Filtering Computation Techniques," IEEE Trans. Comp., vol.c-21, No.7, July 1972
2. Rafael C. Gonzalez, Paul Wintz, Digital Image Processing, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1987
3. Mc Graw-Hill, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 1984
4. S. Lawrence Marple Jr., Digital Spectral Analysis, Prentice-Hall, Inc. 1987
5. Thomas J. Lynch, Ph. D., Data Compression, Wadsworth, Inc. 1985